OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje I

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka,
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
Kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA Predavanje I

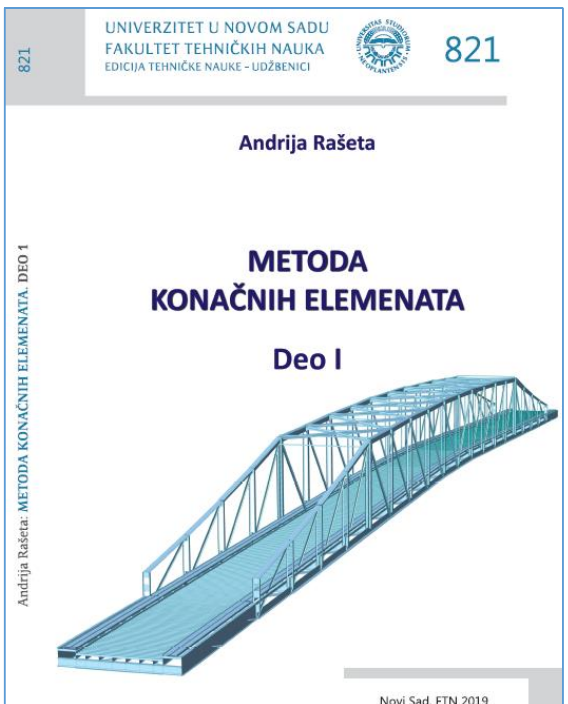
Opšte o predmetu
Literatura
Uvod
Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti
Rekapitulacija odabranih varijacionih principa
Koncept formulacije MKE na bazi pomeranja
Osnovni tipovi konačnih elemenata
Pojam interpolacione funkcije
Jednačina KE. Varijaciona formulacija

Opšte o predmetu

- **Web sajt**
  - http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*
- **Formiranje ocene**
  - **Predispitne obaveze**
    - Predmetni projekat – 30 poena (minimalan broj poena 15) – **obavezan deo**
  - **Završni ispit**
    - Pismeni deo ispita – 40 poena (minimalan broj poena 20) – **obavezan deo**
    - Usmeni deo ispita – 30 poena (minimalan broj poena 15) – **obavezan deo**
  - **Napomene**
    - Minimalan broj poena da bi se ispit položio iznosi 51
    - Na svakom obaveznom delu mora se ostvariti minimalan broj poena da bi se ispit položio
    - Uslov za izlazak na pismeni deo ispita je ostvaren minimalan broj poena iz predmetnog projekta
    - Uslov za izlazak na usmeni deo ispita je ostvaren minimalan broj poena iz pismenog dela ispita

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.



Uvod

- **Osnovne prednosti metode konačnih elemenata (MKE), u odnosu na druge numeričke metode, ogledaju se u**
  - **univerzalnosti primene (primenjiva u različitim oblastima)**
  - **relativnoj jednostavnosti u osnovnim postavkama**
  - **relativno jednostavnoj implementaciji u računarski softver (praktična primena)**
    - može da se primeni na bilo koji granični i/ili početni problem
      - Naponsko-deformacijska analiza, prenos toplote, analizu kretanja fluida, analiza interakcije fluida i konstrukcije, analiza interakcije tla i konstrukcije, analiza magnetnih i elektromagnetnih polja, itd.
    - Nema geometrijskih ograničenja
      - Može da se primeni na domen bilo kakve geometrije
    - Različite materijalne osobine mogu da se primene
    - Nema ograničenja sa aspekta graničnih uslova
    - Nema ograničenja sa aspekta dejstava koja deluju
    - Različite vrste analiza (linearna, nelinearna, statička, dinamička, …)

Uvod

- **U okviru metode konačnih elemenata (MKE) razlikuju se osnovni vidovi, ili formulacije, u zavisnosti od načina na koji se formuliše osnovna jednačina konačnog elementa (KE)**
  - **Direktna formulacija**
    - Može da se koristi kod relativno jednostavnih problema i u znatnoj meri olakšava razumevanje MKE zbog jasnog fizičko značenja koraka u formulaciji. Koriste se osnovne jednačine teorije elastičnosti
  - **<u>Varijaciona formulacija</u>**
    - Koriste se varijacioni principi mehanike kontinuuma, a uspešno se primenjuje na KE jednostavnog i složenog oblika
  - **Metoda težinskih ostataka** (metoda reziduuma ili metoda rezidijuma)
    - Zasniva se na diferencijalnim jednačinama razmatranog problema
  - **Metoda energetskog balansa**
    - Koristi se u termostatičkoj i termodinamičkoj analizi kontinuuma

Uvod

- **U zavisnosti od izbora osnovnih nepoznatih veličina razlikuju se sledeće varijante MKE u analizi inženjerskih konstrukcija**
  - **Metoda pomeranja** (osnovne nepoznate su kinematičke veličine)
  - **Metoda sila** (osnovne nepoznate su statičke veličine)
  - **Mešovita metoda** (osnovne nepoznate su delom kinematičke i delom statičke veličine)
  - **Hibridne metode** (unutar KE pretpostavlja se raspodela pomeranja ili napona koja je nezavisna od pretpostavljene raspodele pomeranja ili napona duž granica KE; razlikuju se hibridna metoda pomeranja, sila i mešovita)
- **U analizi inženjerskih konstrukcija najviše u primeni je METODA POMERANJA**
- **U okviru ovog predmeta primenjuje se METODA POMERANJA**
- **Varijacione metode i metode težinskih ostataka** su od posebne važnosti u mehanici deformabilnih tela za **približno rešavanje problema**. Od metoda težinskih ostataka, kao osnov za formulaciju MKE, najviše u primeni je **Galerkin-ova metoda**, a od varijacionih metoda najpoznatija je **Ritz-ova metoda**

Uvod

- Kada se kao polazište primenjuje/primenjuju
  - **princip virtualnog rada baziran na virtualnim pomeranjima (princip virtualnih pomeranja) ili princip o minimumu potencijalne energije** za osnovne nepoznate usvajaju se kinematičke veličine i dolazi se do **metode pomeranja** (ili metode deformacije)
  - **princip virtualnog rada baziran na virtualnim silama (princip virtualnih sila) ili princip o minimumu komplemetarne energije** za osnovne nepoznate usvajaju se statičke veličine i dolazi se do **metode sila**
  - **mešoviti varijacioni principi** (mešoviti funkcional Hu-Washizu-a koji zavisi od pomeranja, deformacija i napona i mešoviti funkcional Hellinger-Reissner-a koji zavisi od pomeranja i napona) dolazi se do **mešovite MKE**
  - **principi o minimumu potencijalne ili komplemetarne energije** sa nezavisnim interpolacionim funkcijama koje se odnose na područje unutar i duž granica konačnog elementa **dolazi se do hibridne formulacije MKE** (hibridna metoda pomeranja, hibridna metoda sila i hibridna mešovita metoda)

Uvod

- **U mehanici kontinuuma** zavisnosti između geometrijskih i fizičkih veličina definišu se na elementu diferencijalno malih dimenzija. Uz pretpostavku o neprekidnosti, zavisnosti između srednjih vrednosti veličina proširuju se na ceo domen i na taj način se dolazi do **diferencijalnih jednačina posmatranog problema**
- **Za mali broj problema mogu da se odrede analitička rešenja, tj. rešenja u tzv. zatvorenom obliku.** Postoji više razloga za ovo, kao što su:
  - domen definisanosti koji može da bude nepravilan i komplikovan za analitičko opisivanje
  - mogu da budu prisutne različite vrste materijala kao i njihove anizotropne osobine
  - mogu da se javljaju i nelinearni članovi u diferencijalnim jednačinama
  - itd.
- ...

Uvod

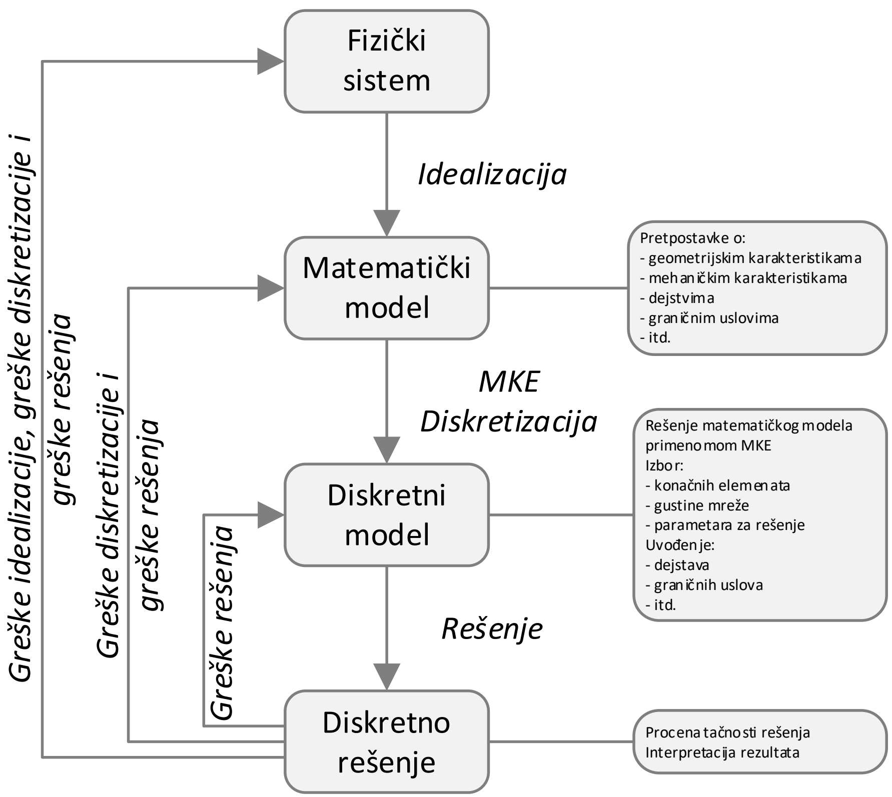
- ...
- S obzirom na prethodno, traže se **približna rešenja** koja mogu da se odrede **metodama numeričke analize**, a jedna od njih je **MKE**
- Pri određivanju rešenja problema metodama numeričke analize prelazi se, u matematičkom smislu, iz područja analize u područje algebre, tj. određuje se rešenje odgovarajućeg diskretnog sistema
- **MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji posmatranog domena i spada u metode diskretne analize**
- **Osnova svih razmatranja je deo domena (poddomen), tj. element, koji umesto diferencijalno malih dimenzija, ima konačne dimenzije i naziva se KONAČNI ELEMENT**

Uvod

- **Stanje u pojedinim KE, pomoću kojih se određuje stanje posmatranog domena, opisano je algebarskim jednačinama umesto diferencijalnim jednačinama**
- U fizičkom smislu, **posmatrani domen koji ima beskonačno mnogo stepeni slobode zamenjuje se diskretnim modelom sa konačnim brojem stepeni slobode**, koji se sastoji od konačnog broja KE međusobno povezanih u konačnom broju tačaka (čvorova)
- S obzirom na to, **MKE može da se shvati i kao način prevođenja kontinualnih sistema u diskretne, odnosno način za formiranje algebarskih jednačina pomoću kojih se aproksimira granični problem,** odnosno određuju osnovne nepoznate veličine u čvorovima mreže KE

Uvod

- **Proces simulacije ponašanja primenom MKE**



Idealizacija ili matematičko modeliranje
U samom procesu simulacije ponašanja najvažniji korak u inženjerskoj praksi je idealizacija koja predstavlja matematičko modeliranje. Naziv idealizacija je posledica činjenice da je matematički model apstrakcija fizičkog sistema.
<u>Matematički model</u>
Formira se idealizacijom fizičkog sistema i predstavlja pogodno izabranu matematičku formulaciju posmatranog fizičkog sistema:
- Optimalan matematički model
  - Obuhvata sve bitne karakteristike fizičkog sistema, a sa matematičke tačke gledišta potrebno je da bude što jednostavniji
- Matematički model služi da simulira i predvidi aspekte ponašanja sistema
  - Pod simuliranjem se podrazumeva kreiranje idealizovane i pojednostavljene reprezentacije ponašanja fizičkog sistema sa ciljem da se matematičkim putem dođe do parametara kojima se opisuju aspekti ponašanja fizičkog sistema

Dikretizacija matematičkog modela
Analitičko rešenje matematičkog modela moguće je naći za mali broj problema pa je neophodno odrediti numeričko rešenje. Za numeričku simulaciju, potrebno je sistem koji ima beskonačno mnogo stepeni slobode prevesti u sistem sa konačnim brojem stepeni slobode, tj. potrebno je formirati diskretni model. Ovaj korak naziva se diskretizacija (obuhvata izbor oblika KE, izbor gustine mreže, izbor osnovnih nepoznatih u čvorovima i izbor interpolacionih funkcija). Postupkom diskretizacije sistem diferencijalnih jednačina zamenjuje se sistemom algebarskih jednačina.

Rešenje sistema algebarskih jednačina
Za određivanje diskretnog rešenja, koriste se postupci za rešavanje sistema algebarskih jednačina, koji se dele u dve generalne grupe: direktni i iterativni. Kod sistema koji imaju normalan broj jednačina direktni postupci su efikasniji, a za sisteme sa velikim brojem jednačina efikasniji su iterativni postupci.

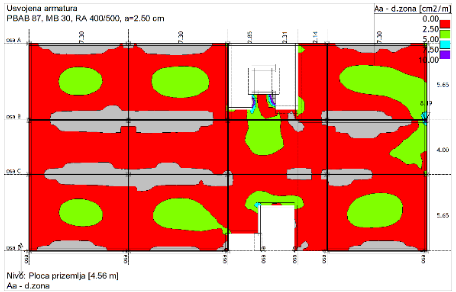
Verifikacija
Poređenje numeričkih rešenja sa tačnim rešenjima matematičkog modela.

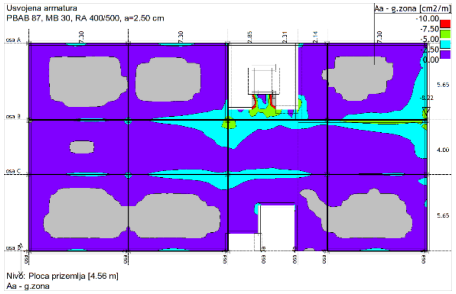
Validacija
Numerička rešenja se porede sa realnim odgovorom fizičkog modela koji se određuje eksperimentalnim istraživanjem

Uvod

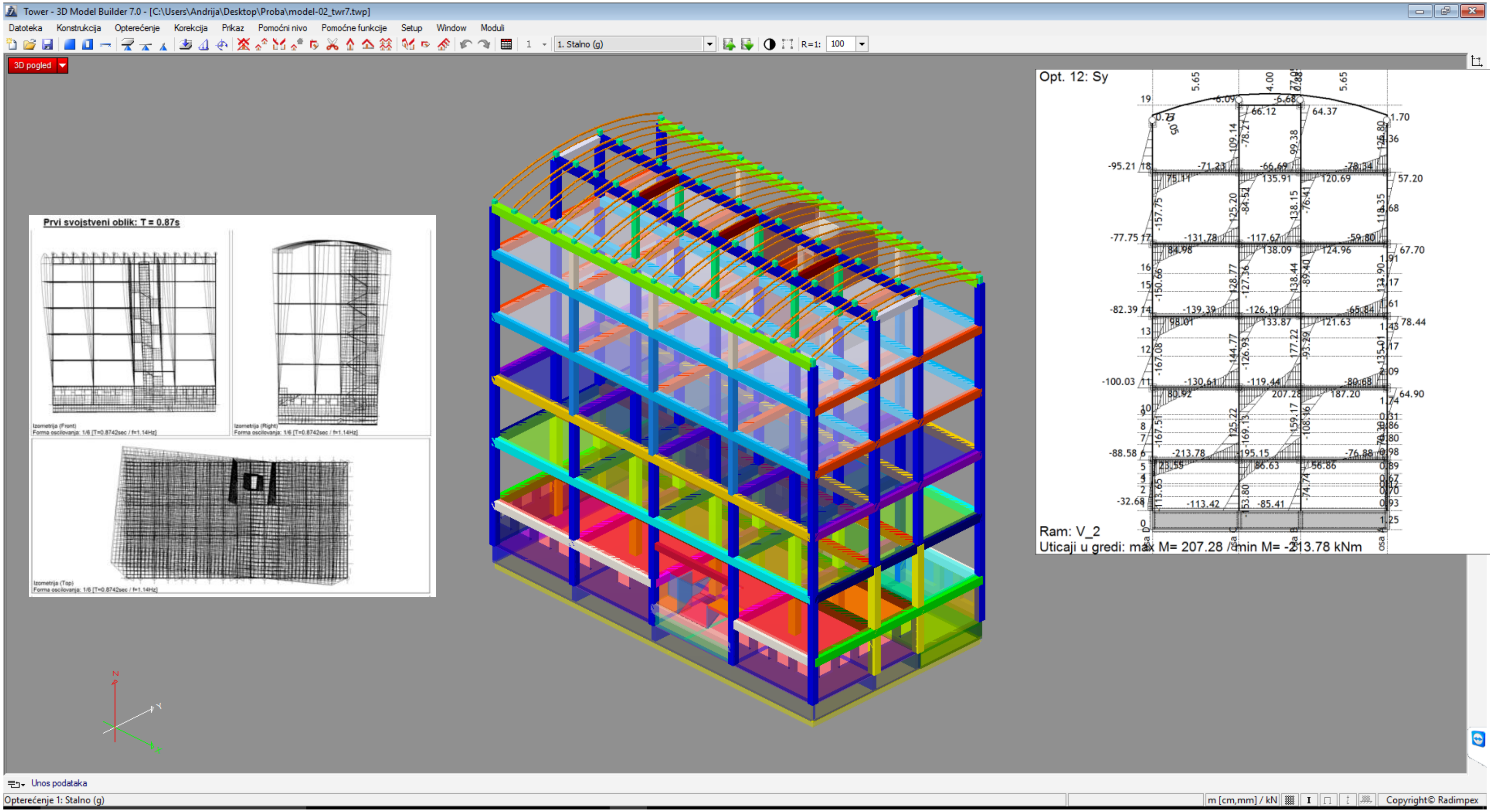
- **MKE ne može praktično da se realizuje bez računara**, sem u slučaju jednostavnih problema koji se rešavaju *ručno*, sa ciljem razumevanja primene metode
- **Računarski softveri na bazi MKE** mogu da se podele u dve osnovne grupe
  - Opšti (praktično za različite vrste problem)
    - ADINA, ABAQUS, ANSYS, MSC Nastran, ...
  - Specijalizovani, tj. za pojedine klase problema
    - Poznatiji specijalizovani računarski softveri koji mogu da se koriste za analizu različitih vrsta inženjerskih konstrukcija su
      - SAP2000, SOFiSTiK, SCiA, STAAD, DIANA, MIDAS, ROBOT Millennium, Tower, AxisVM, ...
- Generalno, glavni elementi strukture računarskog softvera na bazi MKE su
  - **preprocesor** (generisanje modela na bazi MKE)
  - **procesor ili tzv. solver** (numeričko rešavanje sistema algebarskih jednačina)
  - **postprocesor** (prikaz rezultata)

Uvod



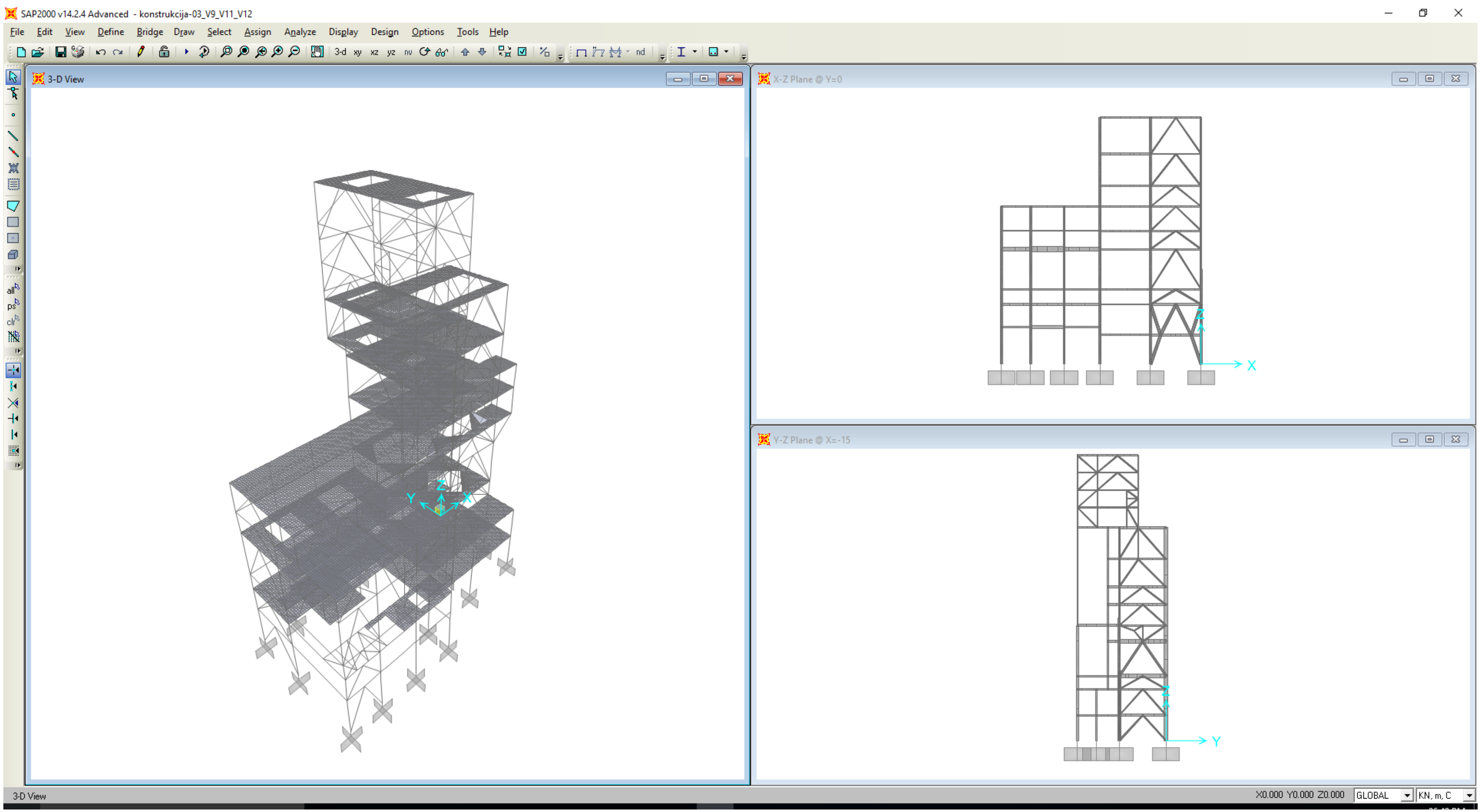


- Numerički modeli konstrukcija



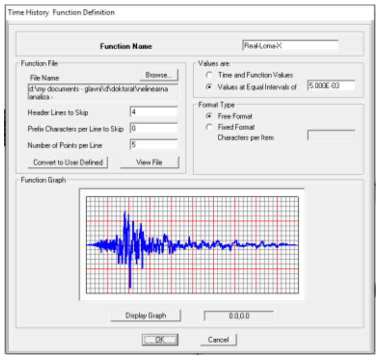
Uvod

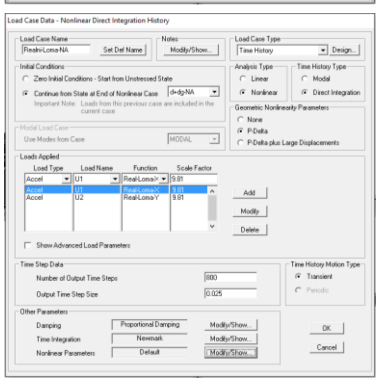
- Numerički modeli konstrukcija

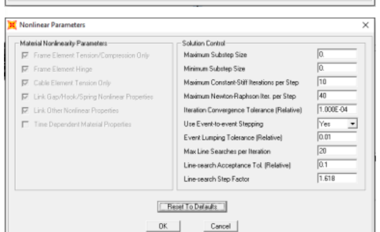


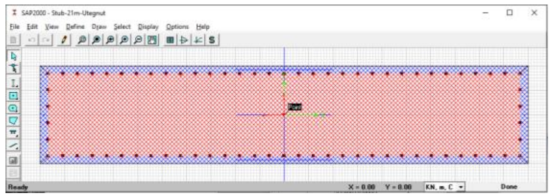
Uvod

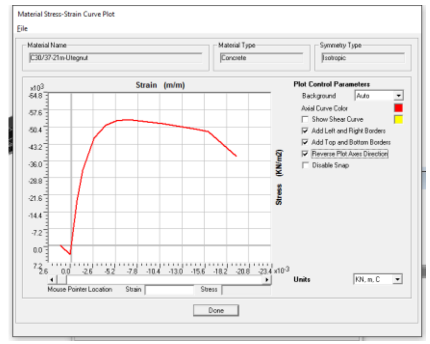
- Numerički modeli konstrukcija

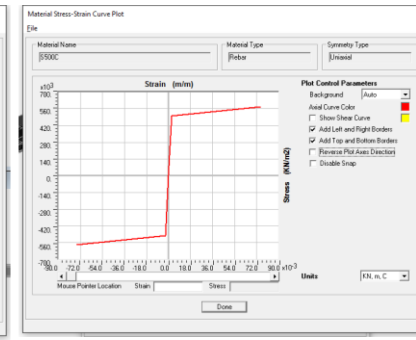


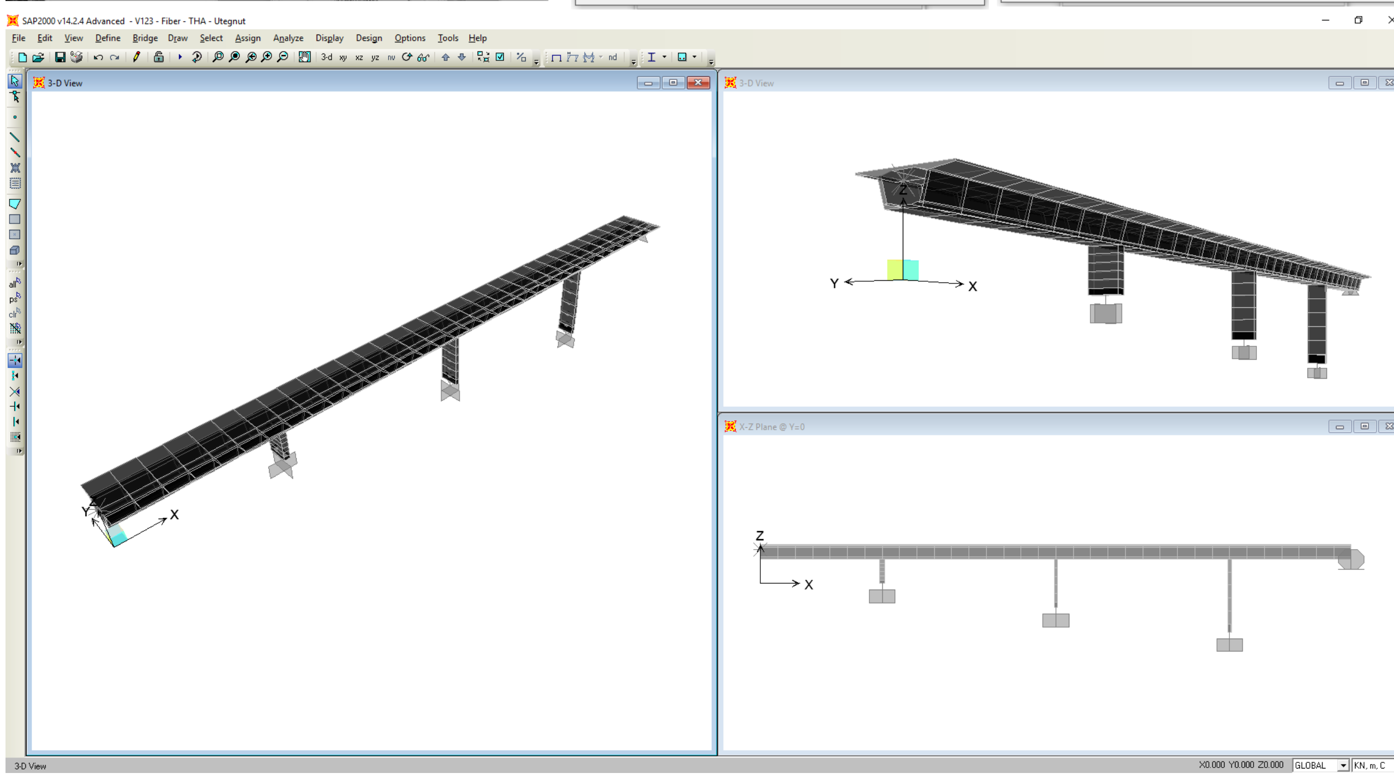






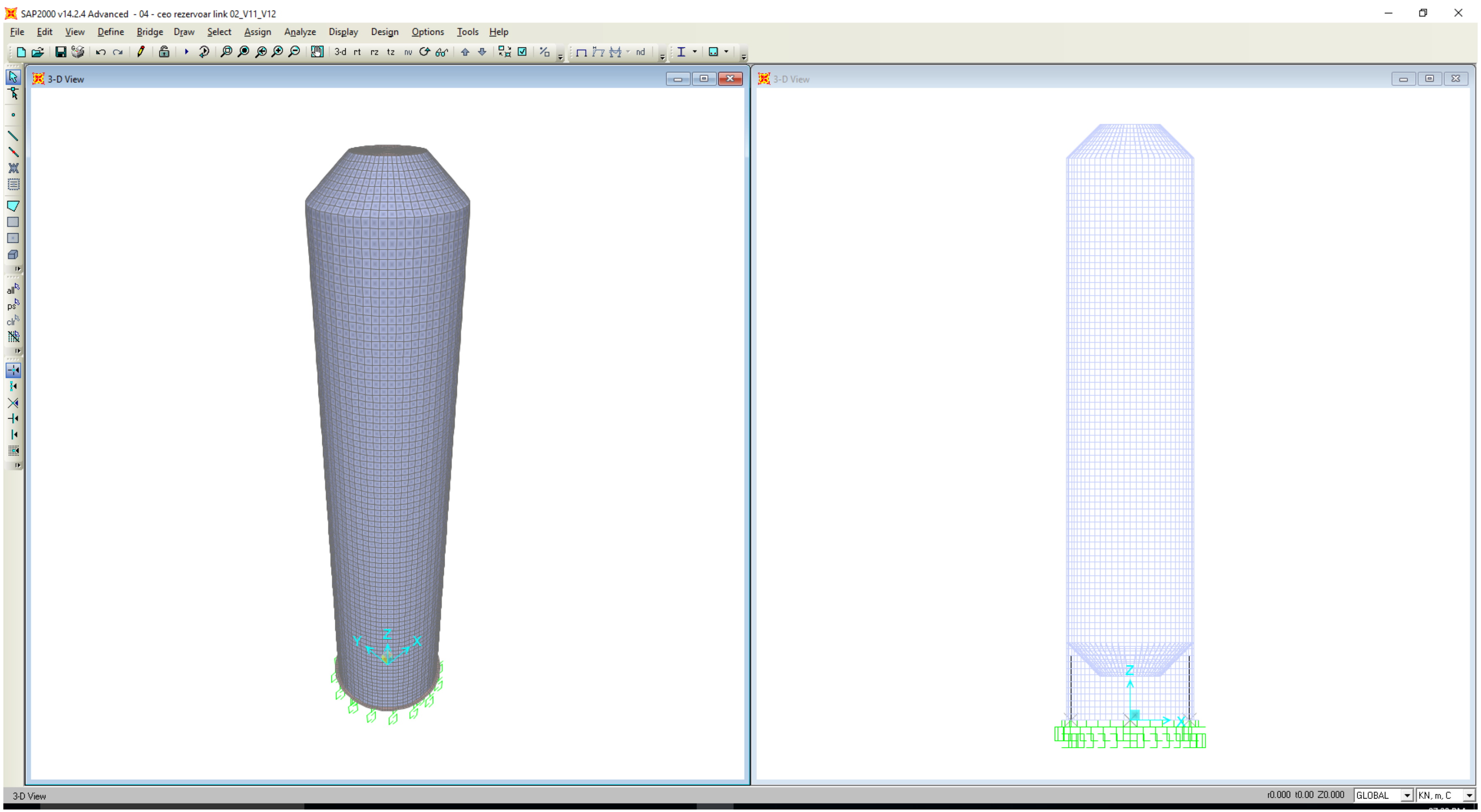






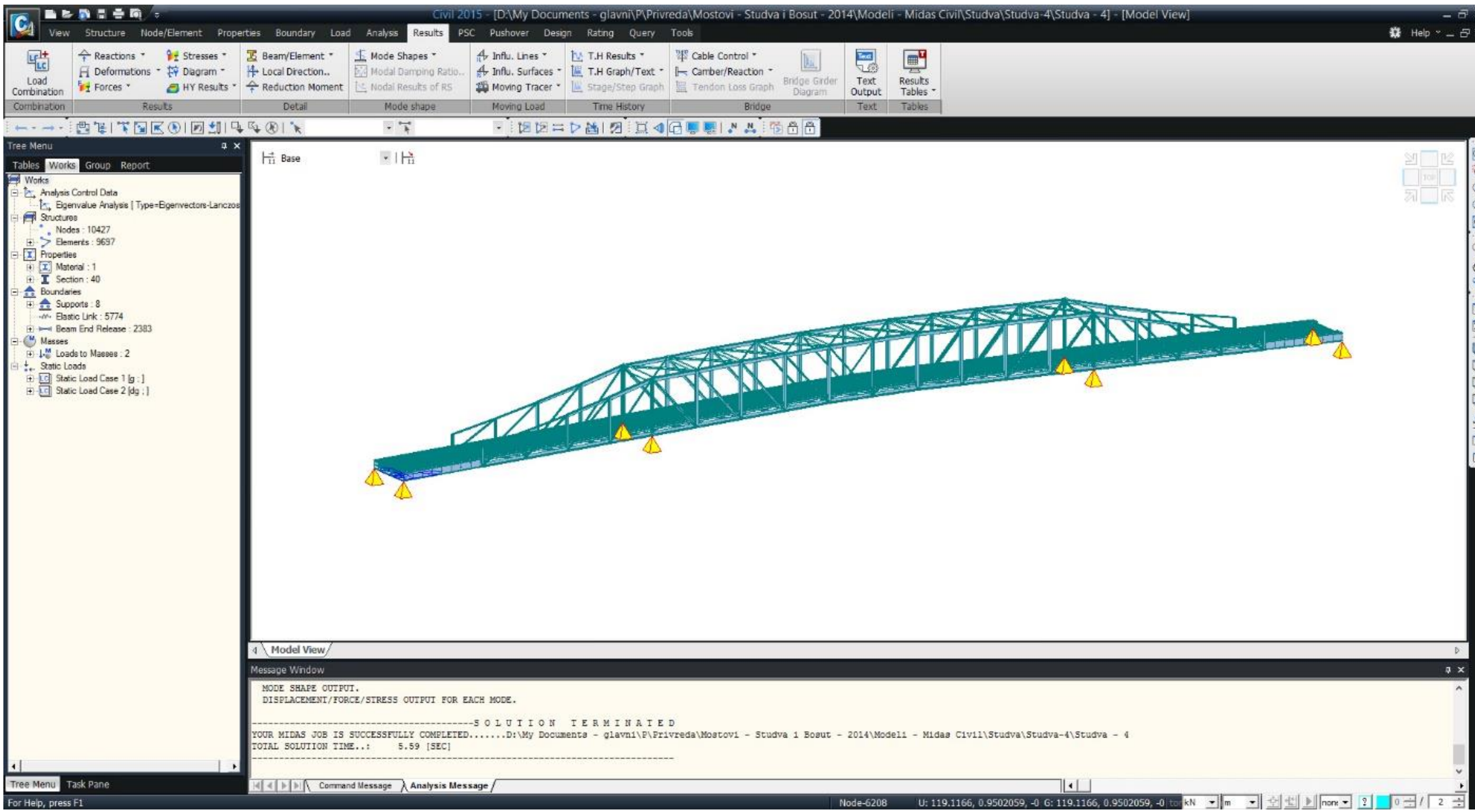
Uvod

- Numerički modeli konstrukcija



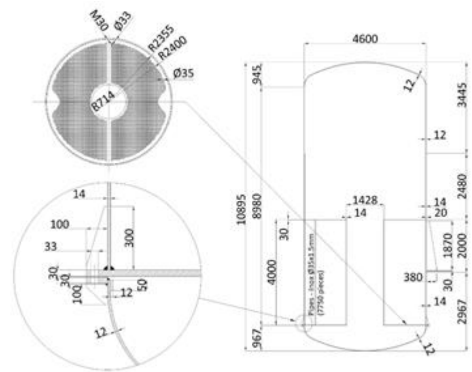
Uvod

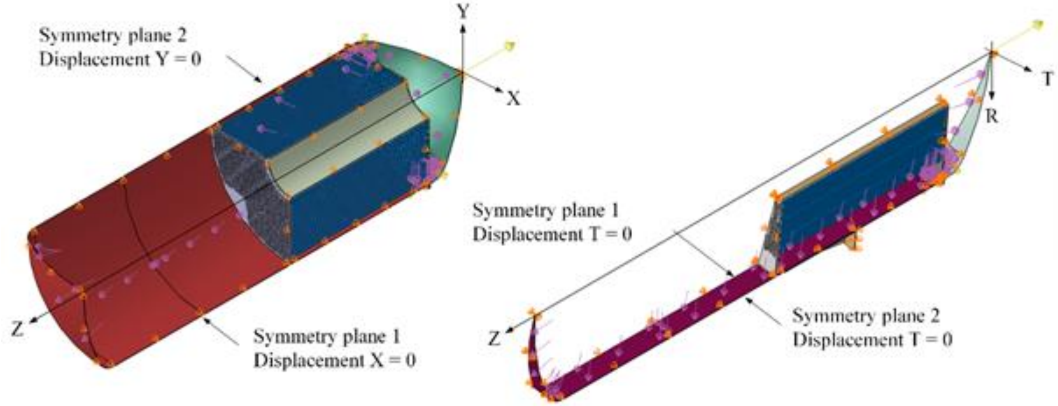
- Numerički modeli konstrukcija

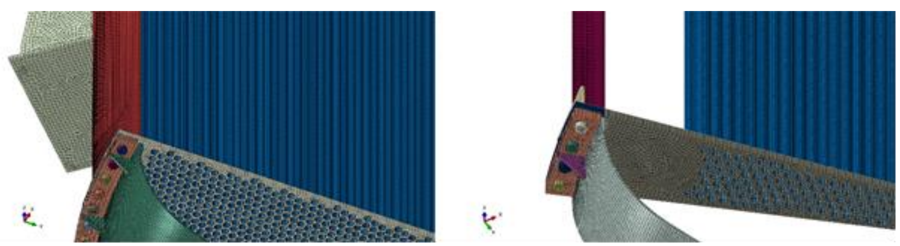


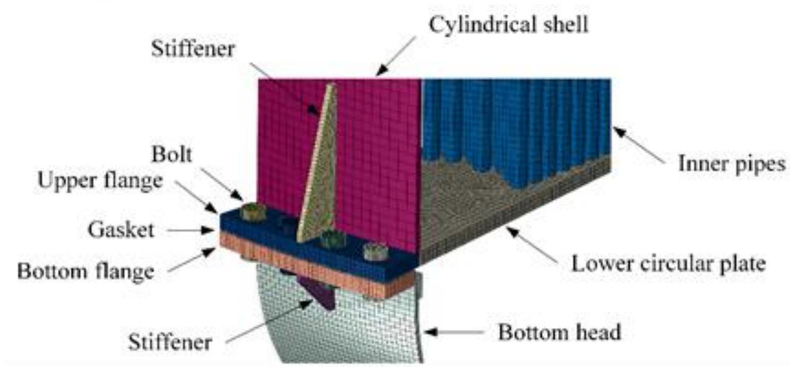
Uvod

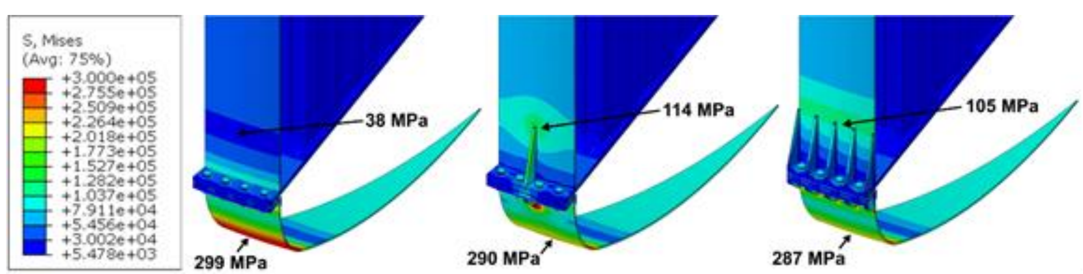
- Numerički modeli konstrukcija





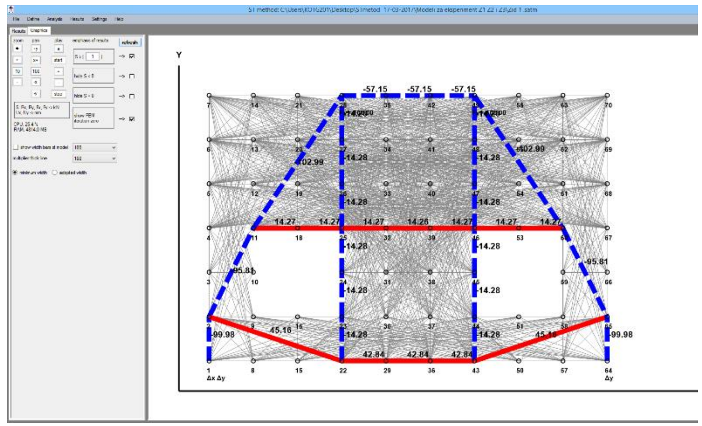


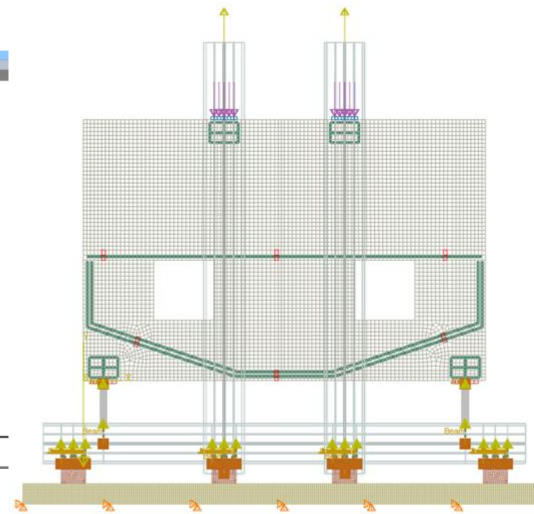


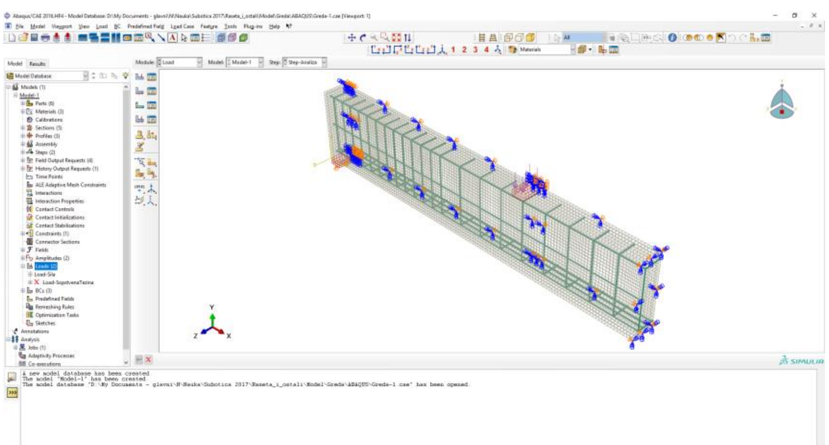


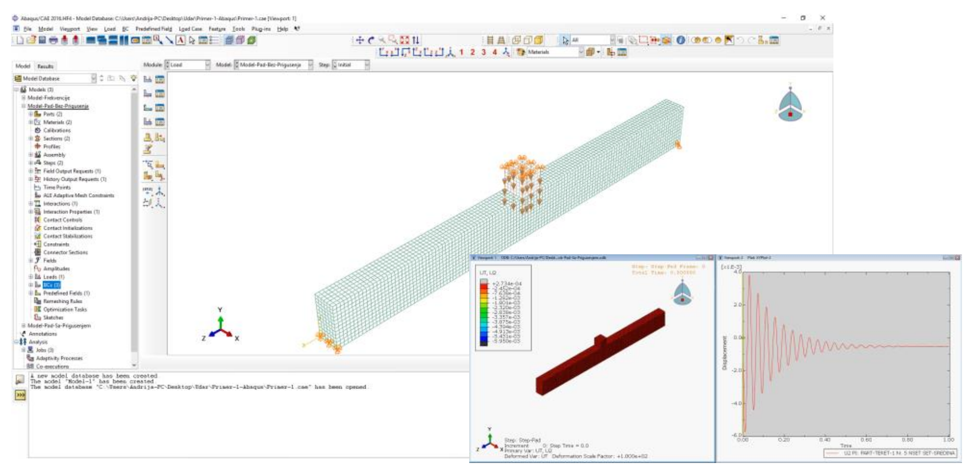
Uvod

- Numerički modeli konstrukcija









Uvod

Postoje brojni računarski softveri zasnovani na MKE koji omogućavaju analizu (inženjerstvo, fizika, ...) bez razmatranja teorije koja opisuje fizičko ponašanje...

Program može da koristi svako ko nauči „user interface”...

Računarski program tada može da se shvati kao „crna kutija“ u kojoj je skrivena teorija koja se smatra nepotrebnom...

OVAKAV PRISTUP MOŽE DA DOVEDE DO VELIKIH GREŠAKA!!!

Uvod

Program može da koristi svako ko nauči „user interface”...

Postavljaju se sledeća pitanja:

- Koji tip konačnog elementa treba da se koristi...
- Gustina mreže konačnih elemenata...
- Dominantan karakter ponašanja (linearan ili nelinearan; statički ili dinamički)...
- Parametri algoritma za rešavanje problema...
- Kontrola „da li su rezultati dobri“...
- „Tačnost“ dobijenih rezultata...
- itd...

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Prostorni problemi

- **Veze između deformacija i pomeranja**

$$\mathbf{u}^T = \{u \quad v \quad w\}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

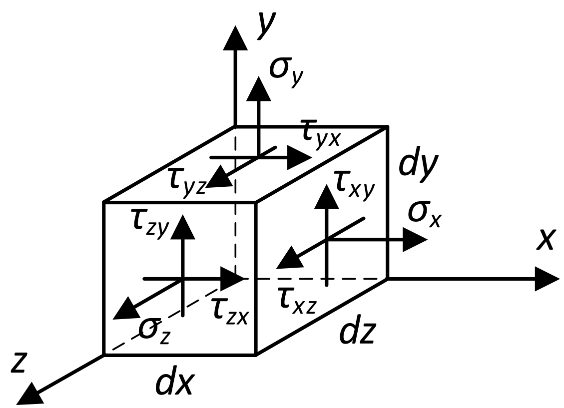
$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial_z \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x & 0 \\ 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z & 0 & \partial/\partial_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u} \qquad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial_z \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x & 0 \\ 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z & 0 & \partial/\partial_x \end{bmatrix}$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Prostorni problemi

- **Uslovi ravnoteže**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+q_{vx}=0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+q_{vy}=0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+q_{vz}=0$$



$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy} \qquad \tau_{xz}=\tau_{zx}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}$$

$$\mathbf{q}^T=\{q_{vx} \quad q_{vy} \quad q_{vz}\}$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} q_{vx} \\ q_{vy} \\ q_{vz} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma}=-\mathbf{q}$$

$$\mathbf{D}_e=\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_k=\mathbf{D}_e^T$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Prostorni problemi

- **Veze između napona i deformacije**
  - Ako se uvedu početni naponi i početne deformacije (index 0)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0 \qquad \mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \qquad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \qquad \boldsymbol{\sigma}_0 = -\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

  - Početne deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ mogu da nastanu usled raznih uzroka, npr. temperaturna promena, bubrenje usled vlage, skupljanje i tečenje betona itd.
  - Temperaturna promena: $\boldsymbol{\varepsilon}_{0t} = \alpha_t t\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \frac{E\alpha_t t}{1-2\nu}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right] - \frac{E\alpha_t t}{1-2\nu}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] - \frac{E\alpha_t t}{1-2\nu}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha_t t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] + \alpha_t t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_t t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

Komentar:
Promena temperature u izotropnim materijalima nema uticaj na klizanje

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Prostorni problemi

Komentar:
n_{11}, n_{12} i n_{13} su kosinusi uglova između spoljašnje normale na površinu tela (pozitivan smer je od omotača van tela) i koordinatnih osa x, y i z, respektivno

- **Prirodni granični uslovi**
  - Statički (zadati po naponima ili silama)

$$\begin{aligned} n_{11}\sigma_x + n_{12}\tau_{yx} + n_{13}\tau_{zx} &= q_{bx} \\ n_{11}\tau_{xy} + n_{12}\sigma_y + n_{13}\tau_{zy} &= q_{by} \\ n_{11}\tau_{xz} + n_{12}\tau_{yz} + n_{13}\sigma_z &= q_{bz} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 & n_{12} & 0 & n_{13} \\ 0 & n_{12} & 0 & n_{11} & n_{13} & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & 0 & n_{12} & n_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{bx} \\ q_{by} \\ q_{bz} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}$$

Neuman boundary-value problems

- **Esencijalni granični uslovi**
  - geometrijski ili kinematički (zadati po pomeranjima)

$$\begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u}$$

Dirichlet boundary-value problems

- **Uslovi kompatibilnosti deformacija**
  - Ako su zadate komponente deformacije tada se iz šest parcijanih diferencijalnih jednačina određuju tri komponente pomeranja. S obzirom na to, da bi sistem imao jednoznačna rešenja po komponentama pomeranja, komponente deformacija moraju da zadovolje dodatne uslove koji se nazivaju uslovi kompatibilnosti (saglasnosti ili poklapanja) deformacija (videti literaturu)

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Prostorni problemi

- **Rešenje problema**
  - Ako se za **osnovne nepoznate usvoje komponente pomeranja** u, v i w tada uslovi ravnoteže mogu da se prikažu preko komponenata pomeranja korišćenjem veza između napona i deformacije i veza između deformacije i pomeranja (Lame-Navijeove (Lame-Navier) jednačine i one su diferencijalne jednačine ravnoteže elastičnog tela)

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}_k\mathbf{u}\end{aligned}\right\} \rightarrow \mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{D}_e\mathbf{D}\mathbf{D}_k\mathbf{u} = -\mathbf{q}$$

  - Prirodni granični uslovi takođe se izražavaju preko komponenata pomeranja

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}_k\mathbf{u}\end{aligned}\right\} \rightarrow \mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\mathbf{D}\mathbf{D}_k\mathbf{u}$$

Rekapitulacija odabranih varijacionih principa. Princip virtualnog rada

- **Deformabilno telo se nalazi u ravnoteži ako je virtualni rad unutrašnjih sila $\boldsymbol{\delta U}$ jednak virtualnom radu spoljašnjih sila $\boldsymbol{\delta W}$**

$$\boldsymbol{\delta U = \ \delta W}$$

Komentar:
Dve osnovne forme principa virtualnog rada:
- Princip virtualnog rada baziran na virtualnim pomeranjima (princip virtualnih pomeranja)
- Princip virtualnog rada baziran na virtualnim silama (princip virtualnih sila)

  - ili u matričnom obliku

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}dV = \int_{Sq} \delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b dS + \int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{q}dV$$

Komentar:
Princip virtualnog rada važi za velika i mala pomeranja, velike i male deformacije, statičku i dinamičku analizu i za bilo koji tip konstitutivnih relacija

  - gde su
    - δU – virtualni rad unutrašnjih sila koji predstavlja virtualni rad napona $\boldsymbol{\sigma}$ na virtualnim deformacijama $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (virtualna promena unutrašnje energije; virtualni deformacioni rad)
    - δW – virtualni rad spoljašnjih sila koji predstavlja rad zapreminskih i površinskih sila (ako postoje sile i spregovi neophodno je dodati i njihove virtualne radove)
  - Virtualna ili moguća pomeranja $\delta\mathbf{u}$ su u skladu sa esencijalnim graničnim uslovima (nezavisna od generalisanih sila koje deluju na telo; neprekidne funkcije položaja (koordinata); ne utiču ni na ravnotežu spoljašnjih sila kao ni na napone unutar tela; promeni vektora položaja za $\delta\mathbf{u}$ odgovara promena deformacije za $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$; $t = const.$). Virtualna pomeranja mogu da se prikažu i kao varijacije pomeranja u posmatranom trenutku vremena t

Rekapitulacija odabranih varijacionih principa. Princip o minimumu potencijalne energije

- Ukupna ili totalna potencijalna energija tela jednaka je zbiru potencijalne energije deformacije (prvi član desne strane jednakosti) i potencijala spoljašnjih sila koji je jednak negativnom radu spoljašnjih sila (drugi i treći član sa desne strane jednakosti)

$$\Pi = U - W$$

- Ako se materijal ponaša linearno elastično sledi (funkcional Lagranža)

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{Sq} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b dS - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q} dV$$

Komentar:
ako postoje sile i spregovi neophodno je dodati i njihov potencijal, tj. negativan rad

- **Elastični sistem je u ravnoteži kada je stacionarna vrednost funkcionala jednaka minimumu ukupne potencijalne energije, a to je ispunjeno ako je prva varijacija Π jednaka nuli**

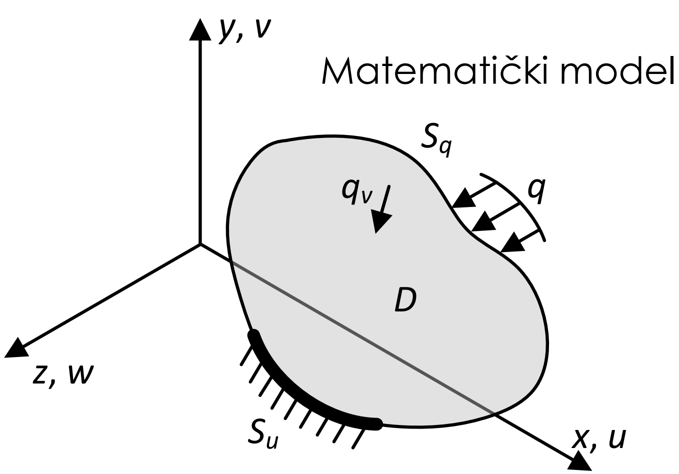
$$\delta \Pi = \delta (U - W) = \delta U - \delta W = 0$$

Komentar:
Predstavlja neophodan uslov za minimum veličine Π u položaju ravnoteže

  - **Od svih mogućih stanja pomeranja, koja su u skladu sa esencijalnim graničnim uslovima, stvarno stanje će biti ono za koje ukupna potencijalna energija elastičnog tela ima minimum**

Koncept formulacije MKE na bazi pomeranja

- Na slici je prikazan domen D elastičnog tela ograničenog konturom S
- Na delu granice S_u zadati su esencijalni granični uslovi, a na delu granice S_q zadati su prirodni granični uslovi
- Telo je izloženo dejstvu površinskih sila $q(q_x, q_y, q_z)$ na konturi S_q i zapreminskih sila $q_v(q_{vx}, q_{vy}, q_{vz})$ u oblasti D
- Komponente vektora pomeranja $\mathbf{u}$ su neprekidne funkcije koordinata tačaka

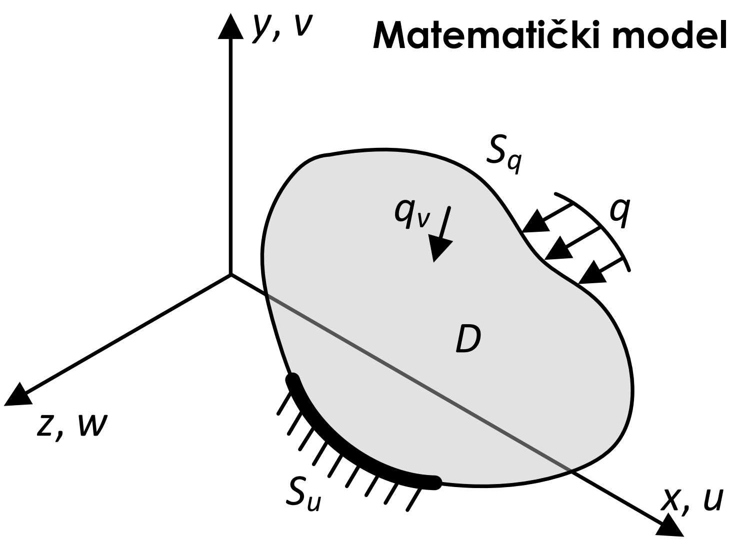


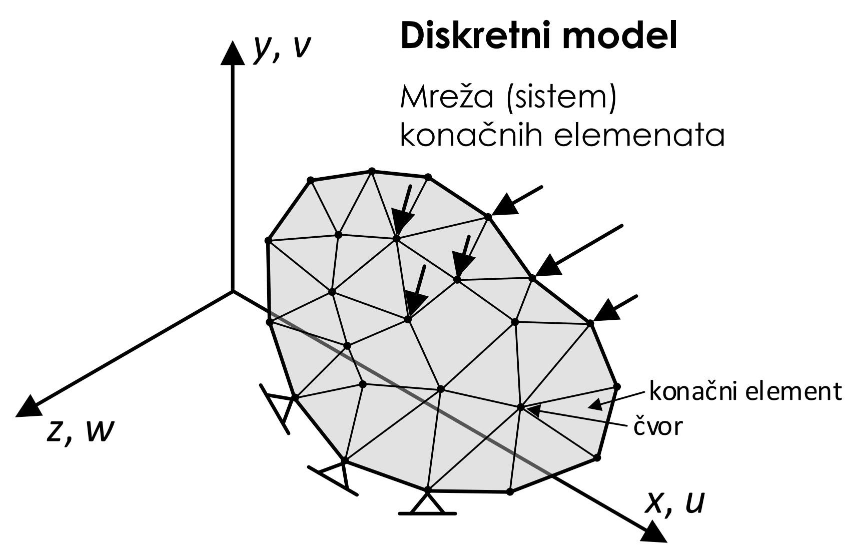
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Rešenje problema sastoji se u određivanju funkcija pomeranja $\mathbf{u}(x, y, z)$ koje zadovoljavaju uslove ravnoteže i granične uslove

Koncept formulacije MKE na bazi pomeranja

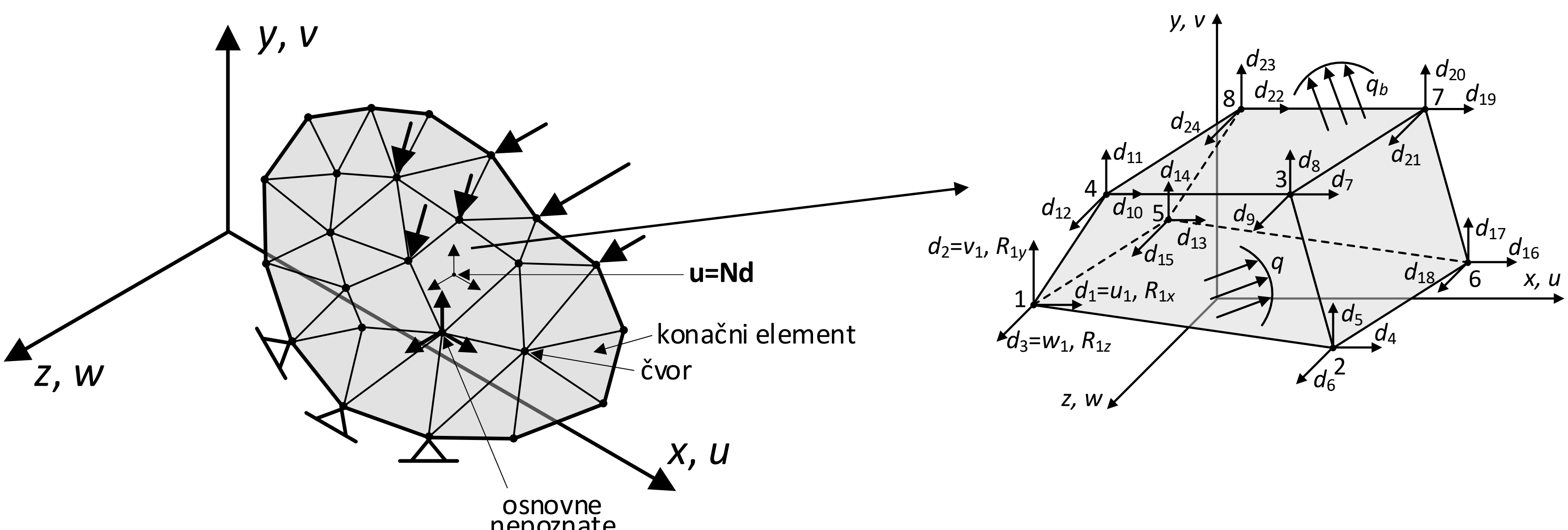
- Princip na kome se zasniva MKE podrazumeva podelu razmatranog domena na konačan broj poddomena konačnih dimenzija, tj. konačnih elemenata, koji su povezani u konačnom broju tačaka (čvorne tačke ili čvorovi). Analizom pojedinih konačnih elemenata, vodeći računa o vezama između njih i graničnim uslovima, analizira se celina





Koncept formulacije MKE na bazi pomeranja

- Pomeranja u bilo kojoj tački konačnog elementa mogu da se prikažu u zavisnosti od pomeranja u čvorovima, pomoću interpolacionih funkcija, odnosno problem određivanja polja pomeranja u razmatranom domenu *D* prevodi se na problem određivanja pomeranja u čvorovima mreže konačnih elemenata

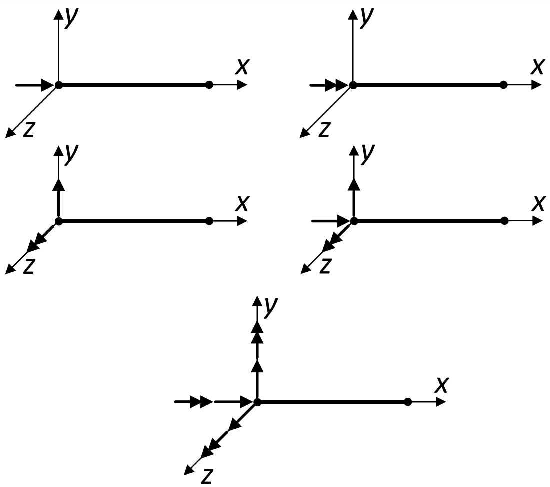


Koncept formulacije MKE na bazi pomeranja

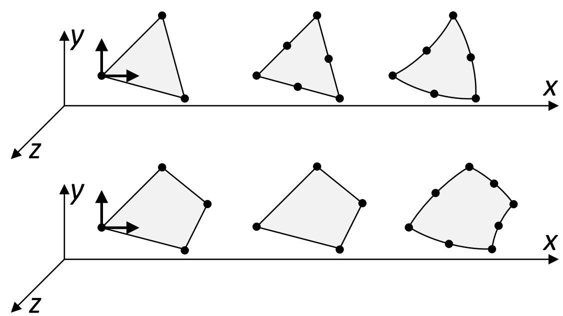
- Pomeranja čvorova određuju se iz uslova ravnoteže u čvorovima mreže konačnih elemenata, vodeći računa o uslovima kompatibilnosti pomeranja konačnih elemenata spojenih u čvorovima i graničnim uslovima
- Nakon određivanja generalisanih pomeranja u čvorovima mreže konačnih elemenata određuju se raspodele pomeranja u pojedinim konačnim elementima (koristeći interpolacione funkcije), zatim polje deformacije i polje napona unutar konačnih elemenata koristeći veze između deformacije i pomeranja i veze između napona i deformacije

Osnovni tipovi konačnih elemenata

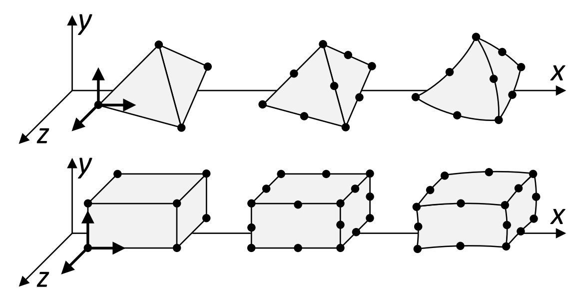
KE za analizu linijskih sistema 1D KE



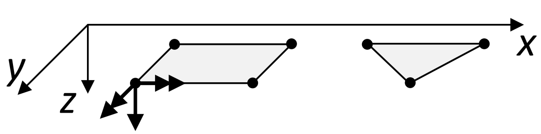
KE za analizu RSN i RSD 2D KE



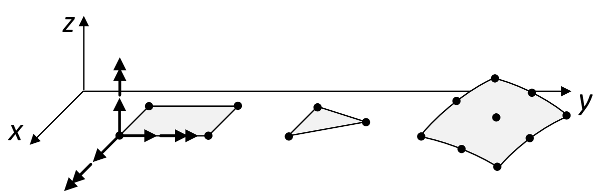
KE za analizu 3D tela 3D KE



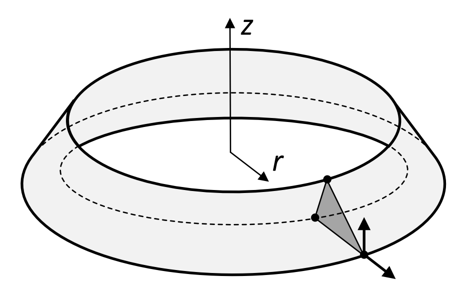
KE za analizu savijanja ploča



KE za analizu ljuski



Osnosimetrični ili prstenasti KE



Pojam interpolacione funkcije

- Raspodela pomeranja $\mathbf{u}$, u polju KE, u zavisnosti od pomeranja $\mathbf{d}$ u čvorovima može da se prikaže na sledeći način

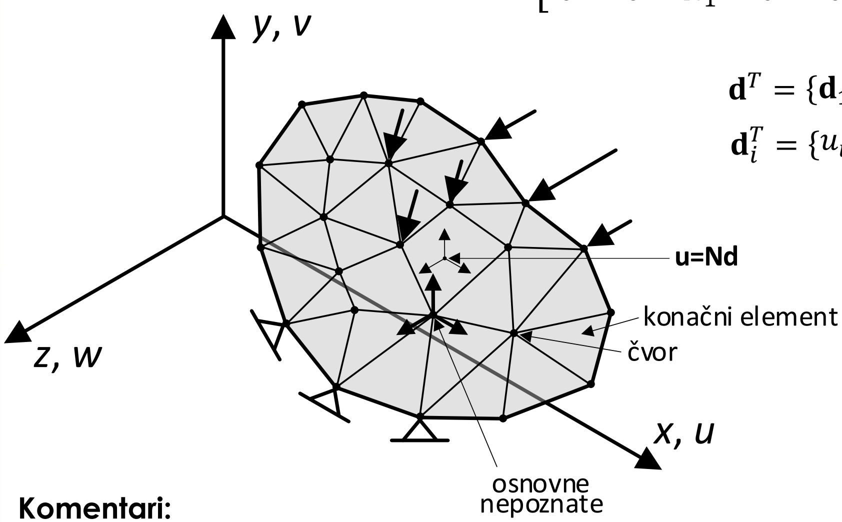
$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \qquad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

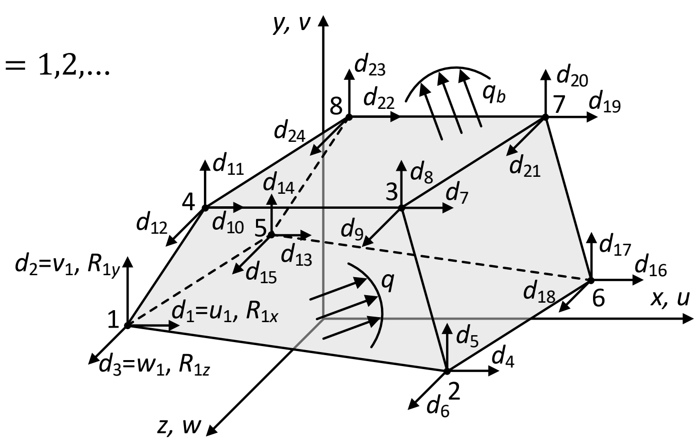
$\mathbf{N}$ je matrica interpolacionih funkcija

$\mathbf{d}$ je vektor pomeranja u čvorovima konačnog elementa (stepeni slobode konačnog elementa)

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \cdots\}$$

$$\mathbf{d}_i^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}, \quad i = 1,2,\ldots$$





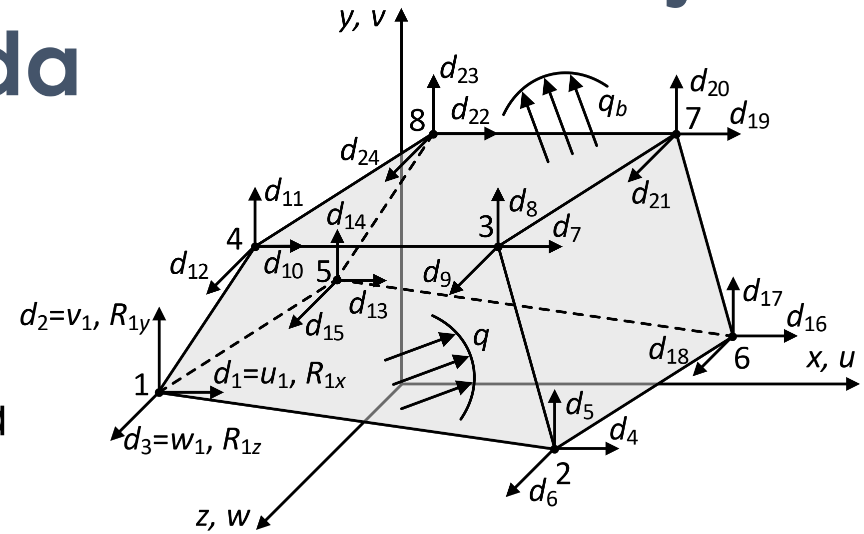
Komentari:

- Interpolacionim funkcijama vrednost promenljive u polju KE interpolira se između njenih vrednosti u čvorovima pa se zato nazivaju ***interpolacione funkcije***
- Naziv ***funkcije oblika*** potiče od toga što se ovim funkcijama opisuje kvalitativna (samo po obliku) promena funkcije u polju KE, a intenzitet je određen u zavisnosti od vrednosti u čvorovima
- U opštem slučaju, interpolacionim funkcijama aproksimira se stvarna promena promenljive u polju KE pa se zato nazivaju ***aproksimativne funkcije***

Jednačina KE. Varijaciona formulacija

- **Kada se koristi princip virtualnog rada baziran na virtualnim pomeranjima (princip virtualnih pomeranja) ili princip o minimumu ukupne potencijalne energije (ova dva principa su za elastične sisteme opisani istim relacijama) za osnovne nepoznate usvajaju se kinematičke veličine (metoda pomeranja)**
- Usvaja se funkcija pomeranja za područje KE, a **osnovne nepoznate su parametri pomeranja (stepeni slobode pomeranja ili kraće stepeni slobode) u čvorovima KE**
- **Zavisnost između pomeranja u proizvoljnoj tački KE i parametara pomeranja u čvorovima uspostavlja se pomoću interpolacionih funkcija**
- **Za mrežu KE esencijalni granični uslovi odgovaraju uslovima kompatibilnosti pomeranja između susednih KE**

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip virtualnog rada



- Analizira se trodimenzionalni KE sa 8 čvorova i 24 stepena slobode
- Vektor pomeranja u čvorovima KE (stepeni slobode KE) glasi

$$\mathbf{d}^T = \{d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad \cdots \quad d_{22} \quad d_{23} \quad d_{n=24}\}$$

$$\mathbf{d}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_3 \quad \cdots \quad u_{k=8} \quad v_{k=8} \quad w_{k=8}\}$$

- Vektor generalisanih sila veze u čvorovima KE koji je izdvojen iz sistema glasi

$$\mathbf{R}^T = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad \cdots \quad R_{22} \quad R_{23} \quad R_{n=24}\}$$

$$\mathbf{R}^T = \{R_{1x} \quad R_{1y} \quad R_{1z} \quad R_{2x} \quad R_{2y} \quad R_{2z} \quad \cdots \quad R_{8x} \quad R_{8y} \quad R_{8z}\}$$

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip virtualnog rada

- Raspodela pomeranja $\mathbf{u}$, u polju KE, u zavisnosti od pomeranja u čvorovima može da se prikaže na sledeći način

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

  - gde je $\mathbf{N}$ matrica interpolacionih funkcija

- Veza između deformacije u polju KE i pomeranja u čvorovima KE određuje se pomoću izraza

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}_k\mathbf{u}\\ \mathbf{u} &= \mathbf{N}\,\mathbf{d}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}\,\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

  - gde je $\mathbf{B}$ matrica veze deformacije i generalisanih pomeranja (matrica funkcija oblika za deformacije)

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}$$

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip virtualnog rada

- Principljavirtualnog rada (princip virtualnih pomeranja) glasi

$$\boldsymbol{\delta U = \delta W}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma_0} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bd} \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{d} \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\mathbf{B}\delta\mathbf{d})^T = \delta\mathbf{d}^T\mathbf{B}^T$$

$$\delta U = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}dV = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}dV - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV$$

$$\boldsymbol{\delta U} = \delta\mathbf{d}^T\left[\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{DB}dV\,\mathbf{d} - \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV\right]$$

$$\delta W = \int_{Sq} \delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b dS + \int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{q}dV + \sum \delta\mathbf{d}_i^T\mathbf{R}_i$$

$$\delta\mathbf{u}^T = (\mathbf{N}\delta\mathbf{d})^T = \delta\mathbf{d}^T\mathbf{N}^T$$

$$\delta\mathbf{u}_S^T = (\mathbf{N}_S\delta\mathbf{d})^T = \delta\mathbf{d}^T\mathbf{N}_S^T$$

$$\boldsymbol{\delta W} = \delta\mathbf{d}^T\left[\int_{Sq} \mathbf{N}_S^T\mathbf{q}_b dS + \int_V \mathbf{N}^T\mathbf{q}dV + \mathbf{R}\right]$$

$$\delta\mathbf{d}^T \overbrace{\boxed{\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{DB}dV}}^{\mathbf{k}}\,\mathbf{d} = \delta\mathbf{d}^T\left[\overbrace{\boxed{\int_{Sq} \mathbf{N}_S^T\mathbf{q}_b dS + \int_V \mathbf{N}^T\mathbf{q}dV + \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV}}^{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}\right]$$

Komentari:

- vektor $\mathbf{q}$ predstavlja sile koje dejstvuju na KE zapremine V, pri čemu na površini Sq deluje opterećenje $\mathbf{q}_b$ i pretpostavlja se da je element izložen početnim deformacijama $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ i početnim naponima $\boldsymbol{\sigma}_0$
- ako postoje sile i spregovi neophodno je dodati i njihove virtualne radove

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip virtualnog rada

- S obzirom na to da prethodni izraz važi za proizvoljno $\delta\mathbf{d}^T$ sledi

$$\mathbf{kd} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}$$

  - odnosno **OSNOVNA JEDNAČINA OPTEREĆENOG KE (jednačina ravnoteže ili jednačina krutosti konačnog elementa; matrična jednačina)** glasi

$$\mathbf{R} = \mathbf{kd} - \mathbf{Q}$$

  - gde su vektor generalisanih sila u čvorovima KE $\mathbf{R}$, matrica krutosti $\mathbf{k}$ i vektor ekvivalentnog opterećenja (vektor konzistentnog koncentrisanog opterećenja) $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{R}^T = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \cdots \quad R_n\}$$

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV$$

$$\mathbf{Q} = \int_V \mathbf{N}^T\mathbf{q}dV + \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T\mathbf{q}_b dS + \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV$$

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip o minimumu potencijalne energije

- Izraz za ukupnu potencijalnu energiju KE glasi

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q} dV - \int_{Sq} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b dS$$

  - gde vektor $\mathbf{q}$ predstavlja sile koje dejstvuju na KE zapremine V, pri čemu na površini Sq deluje opterećenje $\mathbf{q}_b$ i pretpostavlja se da je element izložen početnim deformacijama $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ i početnim naponima $\boldsymbol{\sigma}_0$
- Vektor generalisanih pomeranja (stepeni slobode) u čvorovima KE glasi

$$\mathbf{d}^T = \{d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\}$$

- Raspodela generalisanih pomeranja $\mathbf{u}$ u polju KE u zavisnosti od generalisanih pomeranja $\mathbf{d}$ u čvorovima KE glasi

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

$\mathbf{N}$ je matrica interpolacionih funkcija
$\mathbf{d}$ je vektor generalisanih pomeranja u čvorovima KE (stepeni slobode pomeranja KE)

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip o minimumu potencijalne energije

- Pomeranja u KE moraju biti jednoznačne i neprekidne funkcije koje zadovoljavaju kinematičke relacije

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$$

- Granični uslovi za opterećenu površinu Sq su

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{u}$$

- Kombinovanjem $\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{u}$ i $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$ dobija se

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{N}\mathbf{d} = \mathbf{N}_s \mathbf{d} \qquad \mathbf{N}_s = \mathbf{R}_u \mathbf{N}$$

  - gde je $\mathbf{N}_s$ matrica IF za pomeranja na granici KE
- Raspodela deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$ u polju KE u zavisnosti od generalisanih pomeranja $\mathbf{d}$ u čvorovima KE glasi

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{d} \end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}\,\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

  - gde je $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}$ matrica veze deformacija i generalisanih pomeranja (matrica funkcija oblika za deformacije)

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip o minimumu potencijalne energije

- KE je u ravnoteži kada je prva varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli

$$\delta \int F dV = \int \delta F dV \quad \delta\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial^n \delta F}{\partial x^n} \quad \delta(F+Q) = \delta F + \delta Q \quad \delta(FQ) = (\delta F)Q + F(\delta Q) \quad \delta(F)^n = n(F)^{n-1}\delta F$$

$$\Pi = \Pi(a_i) \qquad \delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial v_i}\delta a_i$$

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}) = 2\mathbf{D}\mathbf{x}$$

$\mathbf{D}$ je kvadratna matrica nezavisna od vektora $\mathbf{x}$

$$\delta\Pi = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}dV - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{q}dV - \int_{Sq} \delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b dS = 0$$

- Vodeći računa o vezama $\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{d} \qquad \delta\mathbf{u}_S = \mathbf{N}_S\delta\mathbf{d} \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{d}$
- sledi

$$\delta\mathbf{d}^T\left(\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV\right)\mathbf{d} - \delta\mathbf{d}^T\left(\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV + \int_V \mathbf{N}^T\mathbf{q}dV + \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T\mathbf{q}_b dS\right) = 0$$

- S obzirom na to da prethodni izraz važi za proizvoljno $\delta\mathbf{d}^T$ sledi

$$\underbrace{\boxed{\left(\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV\right)}}_{\mathbf{k}}\mathbf{d} - \underbrace{\boxed{\left(\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 dV + \int_V \mathbf{N}^T\mathbf{q}dV + \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T\mathbf{q}_b dS\right)}}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$$

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip o minimumu potencijalne energije

- odnosno, jednačina opterećenog KE glasi

$$\mathbf{kd} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

  - gde su matrica krutosti $\mathbf{k}$ i vektor ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \qquad \mathbf{Q} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} dV + \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b dS + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV$$

- Sada ukupna potencijalna energija KE može da se prikaže u obliku

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{kd} - \mathbf{d}^T \mathbf{Q}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bd} \qquad (\mathbf{GH})^T = \mathbf{H}^T \mathbf{G}^T$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \, \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{kd}$$

  - gde su potencijalna energija deformacije KE i potencijal ekvivalentnog opterećenja

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{kd} \qquad -W = -\mathbf{d}^T \mathbf{Q}$$

Jednačina KE. Varijaciona formulacija. Princip o minimumu potencijalne energije

- **Jednačina opterećenog KE je izvedena za KE nezavisno od sistema KE. Kada je KE izdvojen iz sistema mora da se uvede uticaj ostalih elemenata preko generalisanih sila veze u čvorovima, koje odgovaraju vektoru generalisanih pomeranja. Vektor generalisanih sila veze u čvorovima KE glasi**

$$\mathbf{R}^T = \{R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_n\}$$

- Potencijal generalisanih sila veze jednak je njihovom negativnom radu, pa sledi

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{k}\mathbf{d} - \mathbf{d}^T\mathbf{Q}\boxed{- \mathbf{d}^T\mathbf{R}}$$

- Varijacijom prethodnog izraza po $\mathbf{d}^T$ i primenom principa o minimumu ukupne potencijalne energije ($\delta\,\Pi = 0$) dobija se **OSNOVNA JEDNAČINA OPTEREĆENOG KE** (jednačina ravnoteže ili jednačina krutosti konačnog elementa; matrična jednačina)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}^T} = 0 \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{k}\mathbf{d} - \mathbf{Q}$$

$\Pi = \Pi(d_i)$ $\quad \frac{d}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}) = 2\mathbf{D}\mathbf{x}$ $\quad$ $\mathbf{D}$ je kvadratna matrica nezavisna od vektora $\mathbf{x}$

$$\delta\,\Pi = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial d_i}\delta d_i = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial d_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ \ldots, n$$